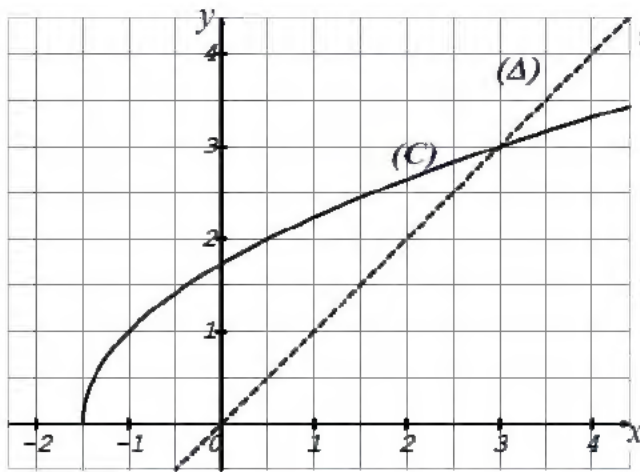


على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.



(1) لنكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كما يلي:

$$h(x) = \sqrt{2x+3} \quad (C) \text{ تمثيلها البياني و } (\Delta)$$

المستقيم ذو معادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (انظر الشكل المقابل).

(أ) - أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على

محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 .

(دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء).

(ب) - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها.

(2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

(3) (أ) - ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

(ب) - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$

(حيث $z \neq 2-3i$).

- حل في \mathbb{C} هذه المعادلة.

(2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \overline{u}, \overline{v})$. A و B نقطتان لاحقتهما على

الترتيب : z_A و z_B حيث : $z_A = 1+i\sqrt{5}$ و $z_B = 1-i\sqrt{5}$.

- تحقق أنّ A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

(3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$.

النقط C, D, E لواحقها على الترتيب: $z_C = -2i$ ، $z_D = 2-3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

ب- استنتج أنّه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها. تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة:
 $14x + 16y + 13z - 47 = 0$ ، و النقط $A(1; -2; 5)$ ، $B(2; 2; -1)$ ، $C(-1; 3; 1)$.
 1) أ- تحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامة.

ب- بيّن أن المستوي (ABC) هو (P) .

2) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) .

3) أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

ب- تحقق أن النقطة $D\left(-1; -2; \frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q) .

ج- احسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (AB) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كما يلي: $f(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3,5 < \alpha < -3,4$ و $-1,1 < \beta < -1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1; 3 + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6 \ln(1-x)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$.
- (1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.
- (2) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما.
- (3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.
- (4) (v_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} بـ : $v_n = \ln(u_n - 3)$.
- (أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدّها الأول.
- (ب) اكتب كلاً من u_n و v_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$.
- اكتب P_n بدلالة n ، ثم بيّن أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-1; 0; 1)$ ، $B(2; 1; 0)$ و $C(1; -1; 0)$.
- (1) بيّن أنّ النقط A ، B و C تُعيّن مستويا.
- (2) بيّن أنّ $2x - y + 5z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
- (3) $D(2; -1; 3)$ و $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$ نقطتان من الفضاء حيث:
- أ- تحقّق أنّ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .
- ب- بيّن أنّ النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .
- ج- استنتج أنّ المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان، ثم جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما.

التمرين الثالث: (04,5 نقاط)

- (1) $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ كثير الحدود للمتغيّر المركب z حيث:
- أ- تحقّق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.
- ب- جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
- ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة $P(z) = 0$.

- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B ، C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$.
 أ- اكتب كلاً من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.
 ب- اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي.
 ج- استنتج طبيعة المثلث ABC .

- (3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.
 أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S .
 ب- عيّن z_A لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .
 ج- بيّن أنّ النقط A ، B ، A' في استقامة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) لنكن g الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 1 - x e^x$.
 (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
 (2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكل جدول تغيّراتها.
 (3) أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $[-1; +\infty[$.
 ب- تحقق أنّ $0,5 < \alpha < 0,6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
 (II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 (2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.
 استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f .
 (3) بيّن أنّ $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$. (تؤوّر النتائج إلى 10^{-2}) .
 (4) أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
 ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
 (5) أ- بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1,6 < x_1 < -1,5$ و $1,5 < x_2 < 1,6$.
 ب- أنشئ (Δ) و (C_f) .
 (6) لنكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = (ax + b)e^x$.
 أ- عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto x e^x$ على \mathbb{R} .
 ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على \mathbb{R} .

الإجابة لموضوع مقترح لدورة 2012 رياضيات/علوم تجريبية

المجموع	مجزأة	الموضوع الأول	
05		التمرين الأول: (05 نقاط)	المتتاليات العددية
	01	1) نقل الشكل و إنشاء u_0, u_1, u_2 و u_3 (دون حسابها).	
	2x0,25	ب) حسب الشكل نضمن أن (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 3.	
	01	2) البرهان بالتراجع أن: من أجل كل n من \mathbb{N} , $0 < u_n < 3$.	
	01	3) أ) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : من أجل كل n من \mathbb{N} , $u_{n+1} - u_n > 0$, إذن (u_n) متتالية متزايدة تماما على \mathbb{N}	
	0,5 1	ب) بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة. حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ نجد $-l^2 + 2l + 3 = 0$ مع $l > 0$ و منه $l_1 = 3$ مقبول و $l_2 = -1$ مرفوض إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.	
		التمرين الثاني: (04 نقاط)	
04	0,25	1) $z = \frac{3i(z+2i)}{z-(2-3i)}$, $z \neq 2-3i$ تعني $z^2 - 2z + 6 = 0$	الأعداد المركبة
	3x0,25	$\Delta = (2i\sqrt{5})^2$, $z_1 = 1 - i\sqrt{5} = z_B$ و $z_2 = 1 + i\sqrt{5} = z_A$	
	2x0,5	2) $ z_A = z_B = \sqrt{6}$ إذن النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{6}$.	
	01	3) أ) $OM' = z' = 3 \times \frac{CM}{DM}$	
	0,5 2x0,25	ب) $CM = DM$ أي $OM' = 3$ M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 3, $OE = 3$.	
		التمرين الثالث: (04 نقاط)	
04	0,75	1) أ) $\overline{AB}(1;4;-6)$ و $\overline{AC}(-2;5;-4)$ ومنه \overline{AB} و \overline{AC} غير مرتبطين خطيا.	
	0,75	ب) $A, B, C \in (P)$ إذن $(P) = (ABC)$ (أو طريقة أخرى)	

	0,5	2) تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) : $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 5 - 6\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$	الهندسة في الفضاء
	01	3) أ) $(Q): 2x + 8y - 12z + 21 = 0$ (أي طريقة تقبل).	
	0,25	ب) $D \in (Q)$	
	0,75	ج) $d(D; (AB)) = \frac{\sqrt{213}}{4}$	

الإجابة لموضوع مقترح لدورة 2012 رياضيات/علوم تجريبية

		التمرين الرابع: (07 نقاط)															
07	2 × 0,25	1 (أ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ، $x = 0$ هو مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .		الدوال العديدية حساب المساحات													
	0,25	ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$															
	0,5	2 $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$															
	0,5	<p>إشارة $f'(x)$</p>															
	0,5	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-2</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>$+$</td> <td>0</td> <td>$-$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$-\infty$</td> <td>$f(-2)$</td> <td>$-\infty$</td> </tr> </table>	x		$-\infty$	-2	0	$f'(x)$		$+$	0	$-$	$f(x)$	$-\infty$	$f(-2)$	$-\infty$	<p>جدول تغيرات الدالة f :</p> <p>$f(-2) = 3 + 6\ln\left(\frac{2}{3}\right)$</p> <p>$f(-2) \approx 0,56$</p>
	x	$-\infty$	-2		0												
	$f'(x)$		$+$		0	$-$											
	$f(x)$	$-\infty$	$f(-2)$		$-\infty$												
	0,5	3 (أ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+5) = 0$															
	0,5	ب) $f(x) - (x+5) = 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$															
2 × 0,5	4 ♦ تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[-3,5; -3,4]$. ♦ تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[-1,1; -1]$.																
0,75	5 إنشاء (C_f) و المستقيم (Δ) .																
0,5	6 أ- معادلة المستقيم (AB) : $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$																
01	ب- $f'(x_0) = \frac{1}{2}$ حل المعادلة يكافئ حل $x_0^2 - x_0 - 12 = 0$ مع $x_0 < 0$ $x_0 = -3$ و $y_0 = 2 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$																
	0,5	7 من أجل كل x من $]-\infty; 0[$ ، $g'(x) = f(x)$.															
الموضوع الثاني																	
04,5	0,75	التمرين الأول: (04,5 نقط)															
		1 البرهان بالتراجع أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $3 < u_n < 4$															
	0,5	2 إثبات أن $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$															
	0,5	استنتاج أن (u_n) متزايدة تماما															
	0,25	3 (u_n) محدودة من الأعلى و متزايدة.															

الإجابة لموضوع مقترح لدورة 2012 رياضيات/علوم تجريبية

	0,75 0,5+0,25 0,25 0,25+0,5	<p>(أ) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدّها الأول $v_0 = \ln \frac{1}{4}$</p> <p>(ب) $u_n = 3 + e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \ln \frac{1}{4}}$ و $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \ln \frac{1}{4}$</p> <p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$</p> <p>$P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n}$ (ج)</p> <p>$\lim P_n = \frac{1}{16}$ $P_n = e^{2\left(\ln \frac{1}{4}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$ و منه $P_n = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$</p>	
04	0,75 01 0,25 01 2 × 0,5	<p>التمرين الثاني: (04 نقاط)</p> <p>(1) $AB(3;1;-1)$ ، $AC(2;-1;-1)$ و AC غير مرتبطين خطيا و منه A ، B ، C تعين مستويا.</p> <p>(2) إثبات أن $2x - y + 5z - 3 = 0$ هي معادلة لـ (ABC)</p> <p>(3) $D \notin (ABC)$</p> <p>ب- $\overline{DH} \cdot \overline{AC} = 0$ و $\overline{DH} \cdot \overline{AB} = 0$ ؛ $\overline{DH} \left(\frac{-17}{15}; \frac{17}{30}; \frac{-17}{6} \right)$ و $(H \in (ABC))$ (أو $\overline{DH} = k \cdot \overline{n}$ و $(H \in (ABC))$).</p> <p>ج- استنتاج أن (ADH) و (ABC) متعامدان. $\overline{AH} \left(\frac{28}{15}; \frac{-13}{30}; \frac{-5}{6} \right)$</p> <p>$(AH): \begin{cases} x = \frac{28}{15}t - 1 \\ y = \frac{-13}{30}t \\ z = \frac{-5}{6}t + 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$</p>	الهندسة في الفضاء
	0,5 0,5 0,75	<p>التمرين الثالث: (04,5 نقطة)</p> <p>(1) أ- $P(6) = 0$</p> <p>ب- $P(z) = (z-6)(z^2 - 6z + 12)$</p> <p>ج- $P(z) = 0$ معناه $z = 6$ أو $z = 3 - i\sqrt{3}$ أو $z = 3 + i\sqrt{3}$.</p>	الأعداد المركبة
04,5	0,75 +0,25 0,25 0,5	<p>(2) $z_C = 3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_A = 6 = 6e^{i0}$</p> <p>ب) $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{i(-\frac{\pi}{3})}$ ؛ $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$</p> <p>ج) $z_A - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_C)$ هي صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{3}$ (أو طريقة أخرى). إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.</p>	

	0,5	(3) أ- العبارة المركبة للتشابه $S: z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$	
	0,25	ب- $z_{A'} = 2i\sqrt{3}$	
	0,25	ج- $z_A - z_{A'} = 2(z_A - z_B)$ ، إذن A, B, A' في استقامة.	
		التمرين الرابع: (07 نقطة)	
07	2x0,25	(I) 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$	الدوال العددية حساب المساحات
	0,75	(2) $g'(x) = -(1+x)e^x$ ، إشارتها هي إشارة $-(1+x)$ لأن $e^x > 0$ ♦ جدول تغيرات الدالة g	
	0,25	(3) أ- إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $[-1; +\infty[$.	
	0,5	ب- التحقق أن $0,5 < \alpha < 0,6$. إشارة $g(x)$ $-\infty \quad + \quad \alpha \quad - \quad +\infty$	
	0,25	(II) 1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	
	0,25	(2) من أجل كل x من $]-\infty; 2]$ ، $f'(x) = -g(x)$.	
	0,25	♦ إشارة $f'(x)$: $-\infty \quad - \quad \alpha \quad + \quad 2 \quad +\infty$	
	0,5	♦ جدول التغيرات.	
	0,5	(3) نبيان أن $f(\alpha) = \frac{-1-\alpha^2}{\alpha}$.	
	0,5	♦ $-2,72 < f(\alpha) < -2,08$.	
	0,25	(4) أ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x-1) = 0$	
	0,25	ب $f(x) - (-x-1) = (x-1)e^x$ إشارتها $-\infty \quad - \quad 1 \quad + \quad 2 \quad +\infty$	
	0,25	الوضع النسبي	
	2x0,25	(5) أ) مبرهنة القيم المتوسطة	
	0,75	ب) رسم (Δ) ، (C_f) .	
	0,5	(6) أ $b = -1$ ، $a = 1$	
	0,25	ب $G(x) = x - (x-1)e^x$	